Didáctica de la matemática: enseñar, aprender, comunicar

Bruno D'Amore

PhD in Mathematics Education

PhD Honoris Causa in Social Sciences and Education, University of Chyprus

DIE, Doctorado Interinstitucional en Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

NRD, Departamento de Matemática de la Universidad de Bologna, Italia

MESCUD, Universidad Distrital de Bogotá, Colombia

La didáctica de la matemática es una **disciplina joven**, nace en los años ’70.

Distancia entre investigación y aplicación…

La escuela y la investigación didáctica:

separación total

Como ha evolucionado la investigación en didáctica de la matemática:

años ’60-’80

la didáctica **A**:

- el problema de la enseñanza (qué enseñar, cuándo y cómo)
- la producción de programas y currículos
- el cambio de lenguaje (la teoría de conjuntos)
- la creación de ambientes artificiales para la enseñanza

…

años ’85-2000

la didáctica **B**:

- el problema del aprendizaje de la matemática
- el aprendizaje de cada una de las disciplinas es específico, por tanto: **epistemología del aprendizaje de la matemática**

años 2000 - hoy

la didáctica **C**:

el papel primordial del docente en aula, con sus convicciones y su preparación

Pero la mayor parte de la escuela está aún en la fase A, salvo ciertos grupos o ciertos casos aislados.

En precedencia, y hasta los años ’80, “hacer didáctica de la matemática” significaba elaborar y proponer contenidos, métodos e instrumentos para la enseñanza.

CONTENIDOS bajo forma de:

- currículos
- proyectos
- objetivos
- ...

MÉTODOS bajo forma de:

- lecciones frontales
- lecciones participativas
- trabajo en grupo
- laboratorios
- mastery learning
- problem solving
- problem posing
- ...

INSTRUMENTOS bajo forma de:

- paquetes pre-confeccionados
- primer uso de instrumentos informáticos (eventualmente “pobres”)
- materiales “estructurados”
- …

ENTRE ESTOS ÚLTIMOS

- bloques lógicos de Dienes
- minicomputador de Papy
- regletas de Gattegno-Cuisinaire
- paralelogramo articulado de Emma Castelnuovo
- geoplano
- …

sólo para hacer algunos ejemplos.

La ilusión era que, construido el conocimiento en una situación artificial ideada intencionalmente para la enseñanza de un determinado argumento, ***el transfer cognitivo*** sería automático.

Entre los contenidos tuvo gran éxito la idea de disminuir la carga algorítmica de la matemática, en todos los niveles escolares, dirigiendo toda la atención al lenguaje lógico formalizado (incluso en edad precoz) con la ilusión que, dominando el lenguaje, los contenidos se hubieran construido por sí mismos.

Este … milagro ilusorio explica el éxito mundial que tuvo la introducción de la **teoría ingenua de conjuntos**.

Todo esto está muy bien delineado y contenido en el período histórico que va desde los años ’60 hasta los años ’80; la didáctica aquí descrita es llamada

Didáctica como Ars docendi,

Brevemente

Didáctica A.

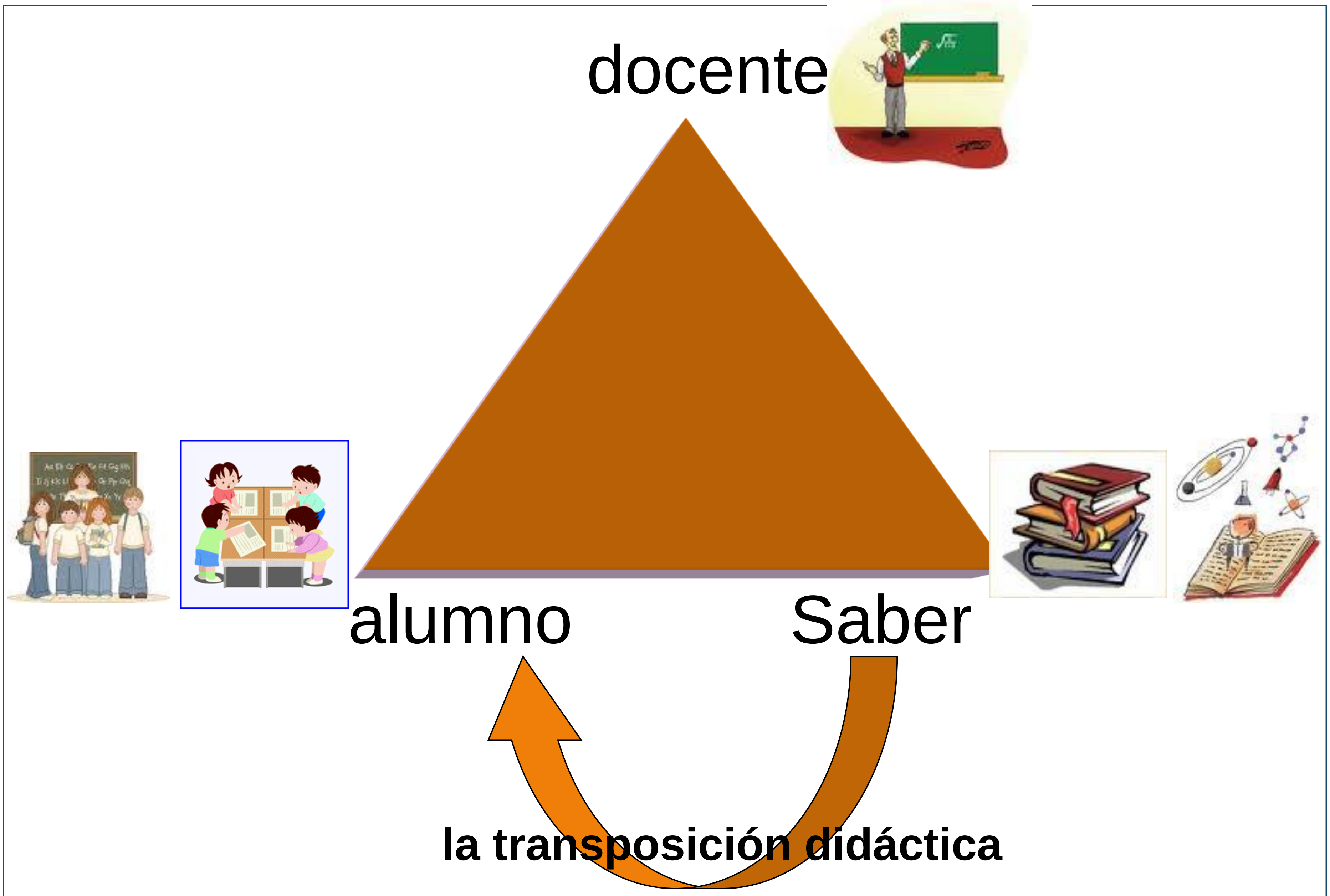
En los años ’70 inicia una didáctica del aprendizaje, centrada en el hecho que el aprendizaje de una disciplina es algo específico de dicha disciplina y no banalmente generalizable.

La didáctica de la matemática, por tanto, se transformó en el estudio de la epistemología (específica) del aprendizaje matemático (*Didáctica B).*

Todo nace del espíritu analítico de un francés universalmente reconocido como el fundador de esta nueva forma de ver la didáctica de la matemática: Guy Brousseau

Hoy la didáctica de la matemática se ocupa del estudio de las situaciones de aula cuando el objeto de estudio pertenece al dominio de la matemática, en todo sentido y en todas las posibles direcciones: humana, relacional, de contenido, afectiva, emotiva etc.

Como esquema representativo de la didáctica B se asume el "triángulo de la didáctica" (de la matemática), en apariencia sencillo, pero riquísimo de implicaciones de todo tipo:


docente
alumno
Saber
la transposición didáctica

Nótese como la metodología está incluida en el “lado” que va del docente al alumno.

Entre los instrumentos y teorias de mayor significado y de mayor eficacia que han sido estudiados y consolidados en estos tres decenios tenemos:

- contrato didáctico
- teoría de los obstáculos
- imágenes y modelos
- modelos parasitas
- misconcepciones
- teoría de las situaciones
- enfoque ontosemiótico
- teoría de la objetivación
- …

Dos ejemplos para ilustrar

EL CONTRATO DIDÁCTICO

MISCONCEPCIONES

IV primaria

“Los 18 alumnos de segundo desean hacer una excursión de un día de Bologna a Verona. Deben tener presente los siguientes datos:

- -dos de ellos no pueden pagar;
- -de Bologna a Verona hay 120 km;
- -por un bus de 20 puestos se deben pagar 200.000 liras al día más 500 liras por cada kilómetro (está ya incluido el peaje).

¿Cuánto debe pagar cada uno?”.

$$500 \times 120 + 200.000$$

Bologna → Verona

120 km

←

120 km

$$500 \times 120 + 200.000$$

“Si querías que calculáramos el regreso, debías haberlo dicho”

Misconcepciones

La multiplicación aumenta siempre

Habiendo aceptado el modelo de multiplicación entre naturales y habiéndolo erróneamente extendido a todas las multiplicaciones, independiente del campo numérico, se forma el modelo “parasito” que puede ser enunciado así: “la multiplicación aumenta siempre”

Pero fatalmente llegará el día en el cual deberá multiplicar por “0.5” y entonces el modelo deja de funcionar y la supuesta regla general de que multiplicando se aumentan los factores se derrumbará.

No es casualidad que muchos estudiantes (¡incluso universitarios!) se declaren maravillados del hecho que entre las dos operaciones: 18×0.25 y $18\div0.25$, la prima es aquella que da el resultado menor, manifestando así la presencia del modelo erróneo, antes mencionado, modelo que se formó en la escuela primaria.

La división diminuye siempre

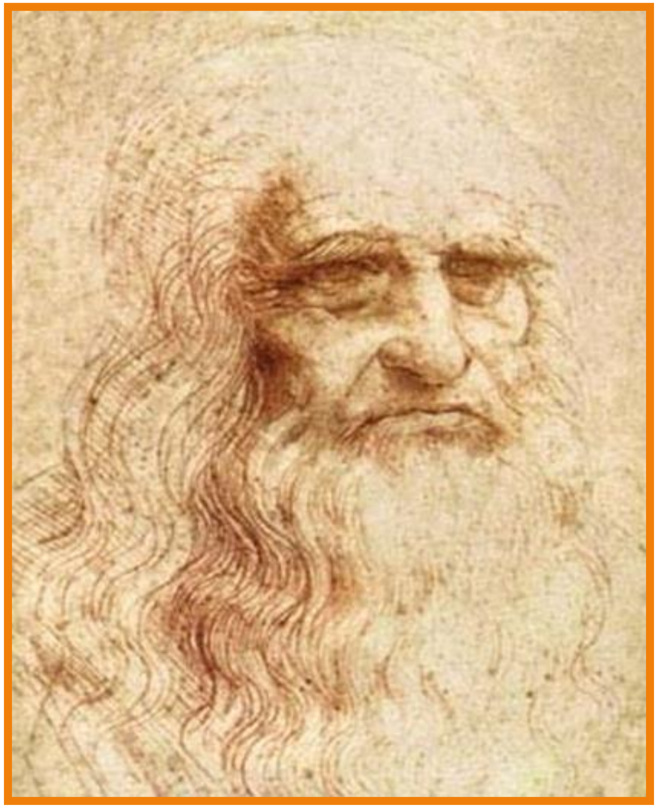
Para la división, existe otro modelo intuitivo que podría convertirse en un modelo no deseado: en una división A÷B, “el número B *debe* ser menor del número A” o, dicho de otra forma: “se debe dividir siempre un número grande por uno más pequeño”.

Las imágenes que se dan de la división llevan a creer que es así: se trata de repartir siempre muchos objetos entre pocos contenedores o de agrupar diversos objetos en pocos recipientes.

De otra parte incluso Leonardo …

Código L (Paris), página 10.

Leonardo debe realizar $2/3 \div 3/4$; sabe que, según las reglas, se debería obtener $8/9$ y lo afirma; pero él mismo contesta este resultado: «quest'è falso imperò ch'egli è più $8/9$ che non è $2/3$».



La replica es fácilmente explicable: si se divide A por B, obteniendo C, C debe ser menor de A, de otra parte, que clase de "división", es decir, qué clase de "partición"

Este modelo ingenuo de división funciona entre los números naturales, pero ciertamente no entre los racionales, por tanto, el modelo no se adapta a las fracciones …

A este punto Leonardo inventa otro algoritmo para realizar las divisiones entre fracciones pero que, de hecho, no funciona.

El “error” no es necesariamente síntoma de falta de conocimiento;

este puede derivar de intuiciones erróneas (misconcepciones), por los general precoces, que pueden coexistir, en la mente del sujeto, con el conocimiento formal sucesivamente adquirido.

En una situación problemática, el contexto puede ser crucial en el determinar el recurso a un tipo de conocimiento o a otro.

Desde los primeros años del nuevo milenio, sin dejar de lado los estudios en didáctica B, se está evidenciando la necesidad de centrar la atención en la influencia directa y específica que tienen las convicciones personales del docente acerca del proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Por tanto la atención, primero reservada al Saber (Didáctica A), después al estudiante (Didáctica B), se está centrando en el docente, dando lugar a una Didáctica C que ya está dando resultados de gran interés.

La problemática de la formación de los docentes, a la cual de años se dedica el NRD de Bologna (financiados por el PRIN del MIUR), se encuentra en esta dirección.

Pero, nos detendremos en la dirección que desde inicio de los años ’90, se ha revelado transversal y de gran utilidad, involucrando el mundo entero.

Dado que la naturaleza de los objetos que trata la matemática es "abstracta", no existen en la realidad empírica, son ideas puras, conceptos puros, no ostensibles empíricamente, lejanos de la heurística típica de las otras disciplinas,

lo único que podemos hacer para que el estudiante entre en contacto con estos objetos es: ***representarlos.***

Así, la amplia y compleja problemática de la **representación** (que tuvo estudiosos precedentes como Aristóteles, Descartes, Leibniz, Kant, sólo para nombrar algunos), entra prepotentemente en la didáctica de la matemática.

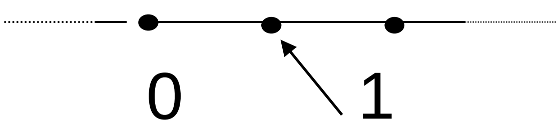
Existen a nuestra disposición tantos registros semióticos en los cuales podemos representar el mismo objeto matemático.

registro semiótico: el lenguaje común: un medio, la mitad, …

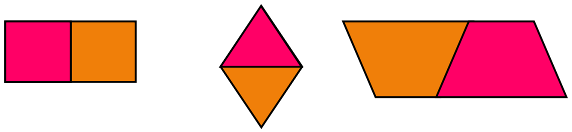
registro semiótico: el lenguaje aritmético: ½, 2/4, 7/14… escritura fraccionaria; 0,5 escritura decimal; 5×10^{-1} escritura exponencial; 50% escritura del porcentaje; $0{,}4\overline{9}$

registro semiótico: el lenguaje algebraico:
$\{x \in Q^{+} / 2x-1=0\}$ escritura en la teoría de conjuntos;
$y = f(x)$: $x \rightarrow x/2$ escritura en la teoría de funciones, …

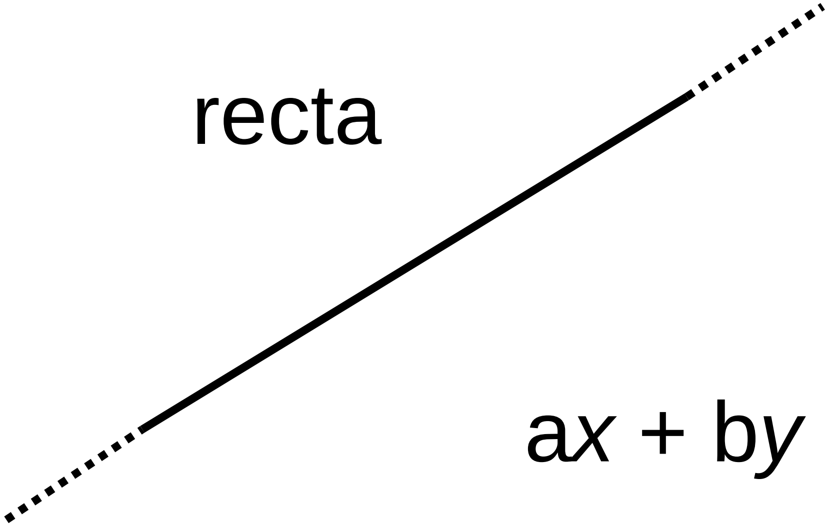
registro semiótico: el lenguaje figural:



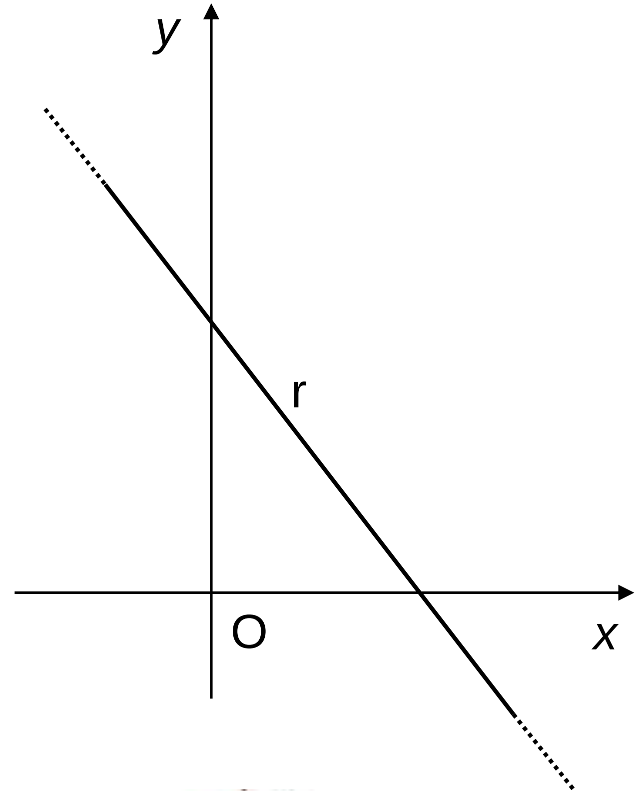
registro semiótico: esquemas pictográficos:



recta



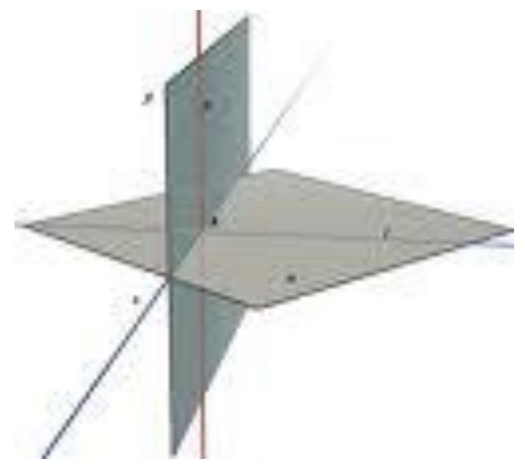
$$ax + by + c = 0$$



$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

x	y
2	2*m*+q
0	q
-1	-*m*+q
1/2	*m*/2 + q

$$y = mx + q$$



Antes de los años ’90 se daba por descontada la capacidad espontánea de los estudiantes de pasar de una representación a otra del mismo objeto;

pero hace cerca de 20 años se ha verificado ampliamente, gracias a la investigación internacional, que el verdadero problema del aprendizaje de la matemática es precisamente la **gestión de las representaciones semióticas**.

Por lo general el docente no lo sabe, no se da cuenta, y como consecuencia actúa sobre los objetos y no sobre las representaciones y sus transformaciones, con resultados, en ocasiones, discutibles (o, por lo menos, ciertamente inútiles)

No es verdad que la gestión de la semiótica de los objetos matemáticos sea automática o espontanea, es un ulterior aprendizaje transversal que debe ser tomado en consideración.

Varios estudiosos franceses, canadienses, italianos, alemanes, españoles, han dado un serio impulso a este tipo de investigaciones.

Por ejemplo, se ha visto como la **conversión** de las representaciones, es decir el pasaje de una representación de un objeto O a otra en otro registro, puede generar mucha dificultad; no es el objeto O en sí a no ser construido cognitivamente, la dificultad reside en la gestión semiótica que, de otra parte, es necesaria precisamente para la construcción cognitiva de O.

Se trata de un pasaje necesario para el aprendizaje.

Recientemente se ha evidenciado y se ha posicionado en el contesto internacional el hecho que los estudiantes (y los docentes) dan significados diversos a representaciones diversas del mismo objeto matemático, aunque si dicha representación se hace al interno del mismo registro (transformación de **tratamiento**) y es realizada por el estudiante mismo.

Se ha visto cómo a representaciones que los estudiantes mismos realizan y transforman, al interno de un registro semiótico (transformación de tratamiento), se les atribuye significados diversos, es decir, para algunos, en este proceso no sólo cambia la representación sino que cambia también el significado.

Se pierde así uno de los pilares del aprendizaje:

la inmutabilidad del significado de un objeto sometido a una trasformación semiótica, hasta ahora considerada obvia y espontanea.

Entre los tantos y diferentes aprendizajes que la matemática analiza hoy, hemos contribuido a enfatizar la diferencia sustancial entre las diferentes tipologías de aprendizaje, y que, consecuentemente, exigen una diversa forma de evaluación:

- aprendizaje conceptual (noética)
- aprendizaje algorítmico
- aprendizaje estratégico
- aprendizaje semiótico
- aprendizaje comunicativo.

Este último es particularmente estudiado en este período, dado que existe la (banal) consideración que no hay relación entre "saber" y "comunicar el propio saber".

La didáctica de la matemática es disciplina autónoma, independiente, con un estatuto epistemológico bien fundado, diversa de la matemática en sí, aunque haya surgido a su interno.

Pero, por el contrario, la didáctica de la matemática no es disyunta de la didáctica general, a la cual hace referencia como muestran, por ejemplo en Italia, algunos estudios.

D’Amore B., Frabboni B. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milano: Angeli.

D’Amore B., Frabboni F. (2005). *Didattica generale e didattica disciplinare*. Milano: Bruno Mondadori.

D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2007). *Le didattiche disciplinari*. Prefazione di Franco Frabboni. Trento: Erickson.

Estamos convencidos que en esta dirección de estudios comparativos se debe aún proseguir ya que se ha revelado útil tanto para los estudiosos de todas las didácticas disciplinares como para los estudiosos de la didáctica general.

Bibliografía mínima mínima

D'Amore B. (2006). ***Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Editorial Magisterio.** **Prefacios de Colette Laborde, Guy Brousseau, Luis Rico.**

Fandiño Pinilla M. I. (2008). ***Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática. Bogotà: Editorial Magisterio.***